OLIMPIADA DE MATEMATICA

ETAPA JUDEȚEANĂ

13 martie 2010

BAREM DE CORECTARE

CLASA A VI – A

1)

a) Un elev, cheltuieşte pentru o excursie, 0,(4) din 0,4 părți din banii economisiți de el la bancă. Cu o altă ocazie el cheltuieşte pentru cumpărarea unui stilou, 0,(3) din 0,3 părți din suma rămasă. Cât a costat excursia, ştiind că suma rămasă în bancă este cu 296 lei mai mult decât a costat stiloul.

<u>Soluție:</u>

Notăm suma cu S suma de la bancă.

Pentru excursie atunci a cheltuit: $\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{10}\cdot S=\frac{8}{45}\cdot S$ (0.50 p)

Suma rămasă este: $S - \frac{8}{45}\cdot S=\frac{37}{45}\cdot S$. (0.50 p)

Prețul stiloului este: $\frac{3}{9}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{37}{45}\cdot S=\frac{37}{450}\cdot S$. (0.50 p)

În bancă i-a mai rămas: $296+\frac{37}{450}\cdot S$ lei. (0.50 p)

$\frac{8}{45}\cdot S+\frac{37}{450}\cdot S+\frac{37}{450}\cdot S+296=S$

$\frac{154}{450}\cdot S+296=\frac{450}{450}\cdot S$

$296=\frac{296}{450}\cdot S$ (1.50 p)

$S=450$

Excursia a costat : $\frac{8}{45}\cdot 450=80$ lei. (0.50 p)

b)Aflați valoarea lui n , din următoarea egalitate:

$$\left[\left(\frac{5}{7}+\frac{55}{77}+\frac{555}{777}\right):\frac{5}{7}-\frac{111}{500}:\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{50}+\frac{1}{500}\right)\right]^n\cdot\left(\frac{\frac{1}{11}+\frac{1}{101}+\frac{1}{1001}+\ldots+\frac{1}{\underbrace{100\ldots01}_{k-bucati}}}{\frac{1}{55}+\frac{1}{505}+\frac{1}{5005}+\ldots+\frac{1}{\underbrace{500\ldots05}_{k-bucati}}}\right)^{n+1}=5,\text{unde } n\in\mathbb{N}^*.$$

Soluție:

$$\left[\left(\frac{5}{7}+\frac{5}{7}+\frac{5}{7}\right):\frac{5}{7}-\frac{111}{500}:\frac{111}{500}\right]^n\cdot\left(\frac{\frac{1}{11}+\frac{1}{101}+\frac{1}{1001}+...+\frac{1}{\underbrace{100...01}_{k-bucati}}}{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{101}+\frac{1}{1001}+...+\frac{1}{\underbrace{100...01}_{k-bucati}}\right)}\right)^{n+1}=5 \quad (1\ p)$$

Efectuând simplificări şi calcule obținem:

$2^n\cdot 5^{n+1}=5$ (1 p)

$\Leftrightarrow 10^n=1$ (0.50 p)

$\Rightarrow$ n = 0 (0.25 p)

Dar $0\notin N^*\Rightarrow S=\Phi$ (0.25 p)

2) Determinați numerele naturale *a,b,c,d* ştiind că :

1) a+b+c·d=1080;

2) $\frac{a+b}{c\cdot d}=\frac{1}{2}$**;**

3) cel mai mare divizor comun al numerelor *a* şi *b* este 45;

4) cel mai mic multiplu comun al numerelor *c* şi *d* este 60;

Câte soluții are problema?

Soluție:

Din 2) cd= 2(a+b) $\Rightarrow$3(a+b)=1080$\Rightarrow$a+b=360 şi cd= 720 (1p)

(a,b)=45$\Rightarrow$a=45k,b=45m, (k,m)=1 (1p)

45(k+m)= 360$\Rightarrow$k+m=8$\Rightarrow$a) k=1 şi m=7$\Rightarrow$a=45 şi b=315 (1p)

b) k=3 şi m=5 $\Rightarrow$a=135 şi b=225 (1p)

Din [c,d]=60 şi cd= 720$\Rightarrow$(c,d)=12$\Rightarrow$ c=12p şi d= 12q, (p,q)=1$\Rightarrow$720=144pq$\Rightarrow$pq=5 şi cum p,q $\in$ N $\Rightarrow$p=1 şi q=5 sau p=5 şi q=1. Obținem c=12 şid=60 sau c=60 şi d=12 (2p)

(a,b) $\in$ {(45,315),(315,45),(135,225),(225,135)}

(c,d) $\in$ {(12,60),(60,12)}

Problema are 8 soluții (1p)

3) Unghiurile $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{BOC}$ sunt adiacente suplementare, iar, [OM, respectiv [ON sunt bisectoarele lor. Aflați m($\widehat{AOB}$), ştiind că m($\widehat{AON}$) = $\frac{2}{3}$ · m($\widehat{MOC}$).

Soluție:

Desen (1 p)

[OM bisectoarea unghiului AOB$\Rightarrow$ m($\widehat{AOM}$) = m($\widehat{MOB}$) = x (1 p)

[ON bisectoarea unghiului BOC$\Rightarrow$ m($\widehat{BON}$) = m($\widehat{NOC}$) = y (1 p)

$2x+y = \frac{2}{3}(x+2y) \Rightarrow 6x+3y=2x+4y \quad \Rightarrow y = 4x$ (2 p)

$2(x+y)=180 \quad \Rightarrow x+ y = 90$ (1 p)

$5x= 90 \Rightarrow x = 18 \Rightarrow$ m$(\widehat{AOB}) = 36^\circ$. (1 p)

4) În triunghiul ABC cu m($\widehat{ABC}$)< 90°, se consideră bisectoarea unghiului ABC şi perpendiculara din A pe această bisectoare, care intersectează BC în D. Ştiind că perpendicularele în A pe AD şi în B pe BD se intersectează în M, iar perpendicularele în D pe AD şi în B pe AB se intersectează în N, demonstrați că:

a) [MA]$\equiv$[ND]   b) [MD] $\equiv$ [AN]

Soluție:

Desen (1p)

Fie [BE bisectoarea unghiului ABC (E$\in$ [AC]) şi AD$\cap$BE={F}.

$\widehat{ABF}$ şi $\widehat{BAM}$ au acelaşi complement, $\widehat{BAF} \Rightarrow \widehat{ABF} \equiv \widehat{BAM}$ (1)

$\widehat{DBF}$ şi $\widehat{BDN}$ au acelaşi complement, $\widehat{ADB} \Rightarrow \widehat{DBF} \equiv \widehat{BDN}$ (2)

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{ABF} \equiv \widehat{DBF}\ (ip.)\ \ (3) \\ \widehat{ABD}\ are\ complementul\ \widehat{ABM} \\ \widehat{ABD}\ are\ complementul\ \widehat{DBN} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABM} \equiv \widehat{DBN}$$ (2p)

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{ABM} \equiv \widehat{DBN} \\ Din\ (1), (2)\ şi\ (3) \Rightarrow \widehat{BAM} \equiv \widehat{BDN} \\ [BF\ bisectoarea\ \widehat{ABD}\ şi\ [BF] \perp [AD] \\ \triangleleft AFB \equiv \triangleleft DFB \Rightarrow [AB] \equiv [BD] \end{array}\right\} \Rightarrow \triangleleft AMB \equiv \triangleleft DNB \Rightarrow [MA] \equiv [ND]$$ (2p)

$$\left.\begin{array}{l} [MA] \equiv [ND] \\ \widehat{MAD} \equiv \widehat{NDA}\ (= 90^\circ) \\ [AD]\ latură\ comună \end{array}\right\} \Rightarrow \triangleleft MAD \equiv \triangleleft NDA \Rightarrow [MD] \equiv [AN]$$ (2p)